Chapitre 3

Espaces de Hilbert

3.1 Forme sesquilinéaire et produit scalaire

Dans ce chapitre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

3.1.1 DÉFINITION

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$; une application $f : E \to F$ est dite *antilinéaire* si, pour tous $x,\ y \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$ on a $f(x+y) = f(x) + f(y)$ et $f(\lambda x) = \overline{\lambda} f(x)$.

3.1.2 REMARQUE

La composition d'une application linéaire et d'une application antilinéaire est une application antilinéaire.

La composition de deux (ou d'un nombre pair) d'application antilinéaires est une application linéaire.

3.1.3 DÉFINITION

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On appelle forme sesquilinéaire (à droite) sur E une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ telle que, pour tout $y \in E$, application $x \mapsto \varphi(x,\ y)$ soit linéaire et telle que pour tout $x \in E$, application $y \mapsto \varphi(x,\ y)$ soit antilinéaire.

Remarquons que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, une forme sesquilinéaire est une forme bilinéaire. Rappelons q
u'une forme bilinéaire $\varphi(x,\ y)$ sur un espace vectoriel complexe (respectivement réel) est dite *hermitienne* (respectivement *symétrique*) si, pour tous $x,\ y \in E$, on a $\varphi(x,\ y) = \overline{\varphi(x,\ y)}$ (respectivement $\varphi(x,\ y) = \varphi(x,\ y)$).

3.1.4 Proposition (Identité du parallélogramme)

Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ une forme sesquilinéaire alors, pour tous $x,\ y \in E$:

$$\varphi(x+y,\ x+y) + \varphi(x-y,\ x-y) = 2(\varphi(x,\ x) + \varphi(y,\ y)).$$

Démonstration: Des propriétés d'une forme sesquilinéaire on a le développements suivants :

$$\varphi(x+y,\ x+y) = \varphi(x,\ x) + \varphi(x,\ y) + \varphi(y,\ x) + \varphi(y,\ y), \tag{3.1.1}$$

$$\varphi(x-y,\ x-y) = \varphi(x,\ x) - \varphi(x,\ y) - \varphi(y,\ x) + \varphi(y,\ y), \tag{3.1.2}$$

pour tous $x,\ y \in E$ et la somme membre à membre donne le résultat. ■

3.1.6 Proposition (Identité de polarisation)

Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{K}$ une forme sesquilinéaire alors pour tous $x,\ y \in E$:

1)
$$2(\varphi(x,\ y) + \varphi(y,\ x)) = \varphi(x+y,\ x+y) - \varphi(x-y,\ x-y).$$

2) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et φ est symétrique :

$$4\varphi(x,\ y) = \varphi(x+y,\ x+y) - \varphi(x-y,\ x-y).$$

3) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

$$4\varphi(x,\ y) = \varphi(x+y,\ x+y) - \varphi(x-y,\ x-y) + i\varphi(x+iy,\ x+iy) - i\varphi(x-iy, x-iy)$$

En particulier, pour connaitre une forme sesquilinéaire ou une forme bilinéaire symétrique φ sur E, il suffit de connaitre $\varphi(x,\ x)$ pour tout $x \in E$.

Démonstration: 1) La différence membre à membre des équations 3.1.1 et 3.1.2 donne le résultat.

2) Dans 1) on remplace $\varphi(y,\ x)$ par $\varphi(x,\ y)$.

3) Soit $\mathbb{U}_4$ l'ensemble des racines 4ième de l'unité, i.e. $\mathbb{U}_4 = \{1, -1, i, -i\}$, alors la somme à droite de l'égalité s'écrit $\sum\limits_{\zeta \in \mathbb{U}_4} \zeta\phi(x + \zeta y,\ x\ + \zeta y)$.

Les propriétés d'une forme sesquilinéaire, donne :
$\varphi(x+\zeta y,\ x\ +\zeta y) = \varphi(x,\ x) + \varphi(\zeta y,\ x) + \varphi(x,\ \zeta y) + \varphi(\zeta y,\ \zeta y) =$

$$= \varphi(x,\ x) + \zeta\varphi(y,\ x) + \overline{\zeta}\varphi(x,\ y) + \zeta\overline{\zeta}\varphi(y,\ y),\ \forall x,\ y \in E,\ \zeta \in \mathbb{C}.$$

Si $\zeta \in \mathbb{U}_4$, alors $\overline{\zeta}\zeta = 1$ et le développement précédent donne

$$\zeta\varphi(x+\zeta y,\ x\ +\zeta y) = \zeta\varphi(x,\ x) + \zeta^2\varphi(y,\ x) + \varphi(x,\ y) + \zeta\varphi(y,\ y),$$

et en prenant la somme sur $\zeta \in \mathbb{U}_4$ on aura :

$$\sum_{\zeta \in \mathbb{U}_4} \zeta \varphi(x+\zeta y, x+\zeta y) =$$

$$\varphi(x,x)\Big(\sum_{\zeta \in \mathbb{U}_4} \zeta\Big) + \varphi(y,x)\Big(\sum_{\zeta \in \mathbb{U}_4} \zeta^2\Big) + \varphi(x,y)\Big(\sum_{\zeta \in \mathbb{U}_4} 1\Big) + \varphi(y,y)\Big(\sum_{\zeta \in \mathbb{U}_4} \zeta\Big),$$

et en utilisant les identités $\sum_{\zeta \in \mathbb{U}_4} \zeta = \sum_{\zeta \in \mathbb{U}_4} \zeta^2 = 0$, on obtient l'égalité. ■

3.1.8 Corollaire

Soient E un espace vectoriel complexe et φ une forme sesquilinéaire sur E ; les conditions suivantes sont équivalentes :

1) φ est hermitienne ;

2) pour tout $x \in E$, on a $\varphi(x,\ x) \in \mathbb{R}$.

Démonstration: Si φ est hermitienne $\varphi(x,\ x) = \overline{\varphi(x,\ x)}$, d'où $\varphi(x,\ x) \in \mathbb{R}$.

Pour montrer la réciproque, on pose $\Phi(x,\ y) = \varphi(x,\ y) - \overline{\varphi(y,\ x)}$. Alors Φ est une forme sesquilinéaire. Par hypothèse, pour tout $x \in E$, $\Phi(x,\ x) = 0$ et par la proposition 3.1.6, Φ est nulle i.e. pour tous $x, y \in E$, $\varphi(x,\ y) = \overline{\varphi(y,\ x)}$. ■

3.1.10 Remarque

Si φ est hermitienne alors, pour tous $x,\ y \in E$:

$$\varphi(x+y,\ x+y) = \varphi(x,\ x) + 2\,\mathrm{Re}\,\varphi(x,\ y) + \varphi(y,\ y),$$
$$\varphi(x-y,\ x-y) = \varphi(x,\ x) - 2\,\mathrm{Im}\,\varphi(x,\ y) + \varphi(y,\ y).$$

3.1.11 Définition

Une forme hermitienne φ sur un espace vectoriel E est dite *positive* si, pour tout $x \in E$, le nombre $\varphi(x,\ x) \geq 0$.

3.1.12 Proposition (inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et φ une forme hermitienne positive sur E, pour tous $x,\ y \in E$ on a

$$|\varphi(x,\ y)|^2 \leq \varphi(x,\ x)\varphi(y,\ y).$$

Démonstration: Soient $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ de module 1 tel que $\lambda\varphi(x,\ y) = |\varphi(x,\ y)|$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(\lambda x + ty, \lambda x + ty)$ est positif. Or

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda x + ty, \lambda x + ty) =& \varphi(\lambda x, \lambda x) + 2t \operatorname{Re} \varphi(\lambda x, y) + t^2\varphi(y, y)\\ =& \varphi(x, x) + 2t|\varphi(x, y)| + t^2\varphi(y, y)\end{aligned}$$

Ce polynôme du deuxième degré en t est positif pour tout $t \in \mathbb{R}$, donc son discriminant est négatif ou nul. On aura donc $|\varphi(x,\ y)|^2 - \varphi(x,\ x)\varphi(y,\ y) \leq 0$. ■

3.1.14 DÉFINITION
Si la forme hermitienne est *définie positive* i.e. pour tout $x \in E - \{0\}$, $\varphi(x, x) > 0$, on dit que c'est un *produit scalaire*.
On définit dans ce cas une norme sur E en posant pour tout $x \in E$:

$$\|x\| := (\varphi(x,\ x))^{1/2}$$

Nous noterons le plus souvent, un produit scalaire par $\langle x, y\rangle$ et la norme induite $\|x\| = (\langle x, x\rangle)^{1/2} = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

3.1.15 DÉFINITION
Un *espace préhilbertien* est la donnée d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et d'un produit scalaire sur E.
Un *espace de Hilbert* est un espace préhilbertien complet pour le norme induite par le produit scalaire.

3.1.16 REMARQUE
Tout sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertienest un espace préhilbertien.
Tout sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert est un espace de Hilbert.

3.1.17 EXEMPLE. 1) L'espace $\mathbb{K}^n$ est un espace de Hilbert , où le produit scalaire est défini par $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^n \xi_k\bar{\eta}_k$, pour tout $x = (\xi_1, \cdots, \xi_n), y = (\eta_1, \cdots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n$.

2) Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice hermitienne, i.e. $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$. Alors l'application f_A de $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ définie par $f_A(x, y) = \langle Ax, y\rangle$ est une forme hermitienne.

   i) f_A est positive si et seulement si les valeurs propres de A sont positives.

   ii) f_A est un produit scalaire si et seulement si les valeurs propres de A sont strictement positives.

3) Soit $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K}) = \{(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{k=0}^{\infty} |\xi_k|^2 < \infty\}$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \bar{\eta}_k$.

4) L'espace de Lebesgue $L^2([a,b],\mathbb{C})$, muni du produit scalaire $(x,y) \mapsto \langle x,y\rangle = \int_a^b x(t)\,\overline{y(t)}\,dt$ est un espace de Hilbert. Par contre $C([-1,1],\mathbb{C})$ muni du même produit scalaire n'est pas un espace de Hilbert ; la norme induite n'est pas complète.

3.1.18 Exercice Trouver une suite de cauchy de $C([-1,1],\mathbb{C})$ pour la norme $\|.\|_2$ qui n'y converge pas.

Deux vecteurs x et y d'un espace préhilbertien E sont dits **orthogonaux** si $\langle x,y\rangle = 0$, on notera par $x \perp y$. Pour deux vecteurs orthogonaux x et y on a (Théorème de Pythagore) :
$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ Soit $y \in E$ un vecteur unitaire ($\|y\| = 1$), la projection de $x \in E$ le long de y est donnée par $x_\parallel = \langle x,y\rangle y$ et on pose $x_\perp = x - x_\parallel$. Alors, $x_\perp$ est orthogonal à $x_\parallel$, car

$$\langle x_\perp, x_\parallel\rangle = \langle x - \langle x,y\rangle y, \langle x,y\rangle y\rangle = \overline{\langle x,y\rangle}\langle x,y\rangle - \langle x,y\rangle\overline{\langle x,y\rangle}\langle y,y\rangle = 0$$

Ainsi d'après le théorème de Pythagore :

$$\|x\|^2 = \|x_\parallel + x_\perp\|^2 = \|x_\parallel\|^2 + \|x_\perp\|^2 = |\langle x,y\rangle|^2 + \|x_\perp\|^2$$

d'où on a $\|x\| \geq |\langle x,y\rangle|$. Comme conséquence une nouvelle démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour une forme hermitienne définie positive i.e. un produit scalaire :

3.1.19 Théorème (inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit E un espace préhilbertien. Alors pour tout $x, y \in E$ on a :

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|.\|y\|$$

Démonstration: Si $y = 0$ l'inégalité est évidente. Sinon, on pose $z = \frac{y}{\|y\|}$ et de ce qui précède on aura $\|x\| \geq |\langle x,z\rangle| = \frac{|\langle x,y\rangle|}{\|y\|}$. ■

3.1.21 Corollaire

Soit E un espace préhilbertiensur $\mathbb{K}$. Alors

1. le produit scalaire est forme sesquilinéaire continue.
2. la fonction $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_+$ définie par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, est une norme sur E.
3. Pour tous $x, y \in E$, on a l'identité du parallélogramme :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

4. On a les identités de polarisation, qui permettent de retrouver le produit scalaire à partir de la norme :
   (i) Si E est réel alors $\langle x, y\rangle = \dfrac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$;
   (ii) Si E est complexe alors $\langle x, y\rangle = \dfrac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \|x + i^k y\|^2$.

Démonstration: Exercice (les points 3) et 4) sont des cas particuliers des propositions 3.1.4 et 3.1.6). ■

Les espaces préhilbertiens sont des espaces vectoriels normés particuliers, il est natural de se demander sous quelles conditions un espace normé est un espace préhilbertien, c-à-d sous quelle condition une norme est induite par un produit scalaire.

Ainsi une condition nécessaire pour qu'un espace vectoriel normé sa norme vérifie l'identité du parallélogramme. En fait cette condition est aussi suffisante :

3.1.23 Théorème (Von Neumann)
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

E est un espace préhilbertien si et seulement si sa norme satisfait l'identité du parallélogramme 3.

Démonstration: (voir le TD) . ■

3.1.25 Exemple. Soit $\mathbb{C}^n$ muni de la norme $\|.\|_1$, n'est pas un espace préhilbertien.

En effet, si on prend pour x le vecteur tel que $x_1 = 1$ et les autres coordonnées nulles et y le vecteur tel que $y_2 = 1$ et et les autres coordonnées nulles, on aura $\|x\|_1 = \|y\|_1 = 1$, et $\|x+y\|_1 = \|x-y\|_1 = 2$, qui ne satisfait pas à l'identité du parallélogramme .

3.1.26 EXEMPLE. Soient $a < b$ des réels. $C([a.b],\mathbb{C})$, muni de $\|.\|_\infty$ n'est pas un espace préhilbertien.
En effet, on considère les fonctions $x, y \in C([a,b])$ définies par $x(t) = 1$, $y(t) = \frac{t-a}{b-a}$, $t \in [a,b]$. Alors

$$\|x\|_\infty = \|y\|_\infty = 1$$

et

$$\|x+y\|_\infty = \max_{a\le t\le b}\left|1+\frac{t-a}{b-a}\right| = 2,\ \|x-y\|_\infty = \max_{a\le t\le b}\left|1-\frac{t-a}{b-a}\right| = 1,$$

d'où $\|x+y\|_\infty^2 + \|x-y\|_\infty^2 \neq 2(\|x\|_\infty^2 + \|y\|_\infty^2)$.

3.1.27 EXEMPLE. L'espace $\ell^p(\mathbb{N})$ $(p \geq 1, p \neq 2)$ n'est pas un espace préhilbertien. En effet, si $x = (1,1,0,0,\cdots)$ et $y = (1,-1,0,0,\cdots)$ alors $\|x\|_p = \|y\|_p = 2^{1/p}$, $\|x+y\|_p = \|x-y\|_p = 2$. Donc l'identité du parallélogramme n'est pas satisfaite.

Montrons que $L^1([0,1])$ n'est pas un espace préhilbertien. Soit $f = \mathbb{1}_{[0,1/2]}$ et $g = \mathbb{1}_{[1/2,1]}$. Alors $\|f\|_1 = \|g\|_1 = \frac{1}{2}$, et $\|f+g\|_1 = \|f-g\|_1 = 1$. D'où $1^2+1^2 = 2 \neq 1 = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2$.

3.1.28 Exercice Qu'en est-il de $L^p([0,1],\mathbb{K}) = \{x : [0,1] \to \mathbb{K} : \int_0^1 |x(t)|^p\,dt < \infty\}$ pour $p \in [1,+\infty]$?

3.1.29 DÉFINITION
Soit $(H_1, \langle,\rangle_1$ et $(H_2, \langle,\rangle_2)$ deux espaces préhilbertiens.

1. Une application linéaire $\Phi : H_1 \to H_2$ est une **isométrie** si : pour tout $x \in H_1$, $\|\Phi(x)\|_2 = \|x\|_1$.
2. L'application est dite **unitaire** si elle est en plus bijective.

3.1.30 Exercice Montrer qu'une application linéaire $\Phi : H_1 \to H_2$ entre espaces préhilbertiens est une isométrie si et seulement si pour tout $x, y \in H_1$ on a

$$\langle\Phi(x), \Phi(y)\rangle_2 = \langle x - y\rangle_1.$$

Tout espace préhilbertienest isomorphe à un sous-espace dense d'un espace de Hilbert par complétion.

3.1.31 THÉORÈME
Soit $(E, \langle,\rangle)$ un espace préhilbertien. Il existe un espace de Hilbert $(\mathscr{H}, \langle,\rangle)$ et une isométrie linéaire $\Phi : E \to \mathscr{H}$ tels que $\Phi(E)$ soit dense dans $\mathscr{H}$.

On dit que $\mathscr{H}$ est un complété de E. Ce complété est unique à isomorphisme isométrique près.

Démonstration: C'est une conséquence des théorèmes de complétion d'un espace métrique et de l'unicité du prolongement des applications uniformément continues, voir 1.3.15. ∎

3.2 Orthogonalité

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour des espaces réels, si x, y sont tous les deux non nuls, alors $-1 \leq \frac{\langle x,y \rangle}{\|x\| \, \|y\|} \leq 1$, et donc l'angle entre x et y peut être défini par $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\langle x,y \rangle}{\|x\| \, \|y\|}\right)$. Pour les espaces complexes, le problème est plus difficile, comme le produit scalaire $\langle x, y \rangle$ est à valeurs complexes il n'est pas clair ce que "angle" signifie dans ce cas. Néanmoins, un cas particulier, très important, peut être considéré, à savoir le cas $\langle x, y \rangle = 0$.

3.2.1 DÉFINITION
Soit H un espace préhilbertiensur $\mathbb{K}$. Deux vecteurs $x, y \in H$ sont dits orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$, et qu'on note $x \perp y$.

On va généraliser cette notion, à des ensembles.

3.2.2 DÉFINITION
Soit H un préhilbertienet soit A un sous-ensemble de H. Un vecteur $x \in H$ et l'ensemble A sont dits orthogonaux dans H si x est orthogonal à tout vecteur de A, qu'on note $x \perp A$. L'orthogonal de A est l'ensemble

$$A^{\perp} = \{x \in H : x \perp A\} (= \{x \in H : x \perp a \, \forall \, a \in A\} = \{x \in H : \langle x, a \rangle = 0, \, \forall \, a \in A\}),$$

i.e. l'ensemble $A^{\perp}$ formé des vecteurs de H qui sont orthogonaux à tout vecteur de A (Si $A = \emptyset$ alors $A^{\perp} = H$).

Soient M et N deux sous-ensembles de H. M et N sont orthogonaux si pour tout $x \in M, y \in N$, $x \perp y$, et qu'on note $M \perp N$.

3.2.3 EXEMPLE. *Si $E = \mathbb{R}^3$ et $A = \{(a_1, a_2, 0) : a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$, alors $A^{\perp} = \{(0, 0, x_3) : x_3 \in \mathbb{R}\}$.*

3.2.4 PROPOSITION
Soit E est un préhilbertien.

1) Pour tout $x, y \in E$
   (a) $x \perp y \Leftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$; si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *(Le théorème de Pythagore)*
   (b) $x \perp y \Leftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ et $\|x+iy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$; si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
2) Si $B \subset A$, alors $A^{\perp} \subset B^{\perp}$.
3) $A^{\perp}$ est un sous-espace fermé de E.
4) $A \subset (A^{\perp})^{\perp}$.

Démonstration: 1. Comme $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \|x\|^2 + \langle x,y \rangle + \langle y,x \rangle + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

2. Soit $x \in B^{\perp}$ et $a \in A$. Alors $a \in B$, d'où $\langle x, a \rangle = 0$ pour tout $a \in A$, i.e. $x \in A^{\perp}$.
3. Soit $x, y \in A^{\perp}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Alors $\langle \alpha x + \beta y, a \rangle = \alpha \langle x, a \rangle + \beta \langle y, a \rangle = 0$, et $\alpha x + \beta y \in A^{\perp}$, et donc $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E. Soit $\{x_n\}$ une suite de $A^{\perp}$ telle que $\{x_n\}$ converge vers $x \in E$. La continuité du produit scalaire nous donne $\langle x, a \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, a \rangle = 0$, pour tout $a \in A$. Ainsi $x \in A^{\perp}$.
4. Soit $a \in A$. Pour tout $x \in A^{\perp}$, $\langle a, x \rangle = \overline{\langle x, a \rangle} = 0$, d'où $a \in (A^{\perp})^{\perp}$ c-à-d $A \subset (A^{\perp})^{\perp}$. ■

3.2.6 Proposition

Soit F un sous-espace vectoriel d'un préhilbertien$E$. Alors $x \in F^{\perp}$ si et seulement si $\|x - y\| \geq \|x\|$ pour tout $y \in F$.

Démonstration: "$\Rightarrow$" Soit $x \in F^{\perp}$, pour tout $y \in F$, $x \perp y$, et $x \perp (-y)$. D'après (a) du Lemme 3.2.4, $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|(-1)y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \geq \|x\|^2$.
"$\Leftarrow$" Supposons que $\|x-y\|^2 \geq \|x\|^2$ pour tout $y \in F$. Soit $y \in F$. Si $y = 0$ alors $\langle x, y \rangle = 0$. Si $y \neq 0$, alors $\alpha y \in F$ pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ car F est un sous-espace vectoriel. Ainsi $\|x\|^2 \leq \|x - \alpha y\|^2 = \langle x - \alpha y, x - \alpha y \rangle = \|x\|^2 + |\alpha|^2 \|y\|^2 - \alpha \overline{\langle x, y \rangle} - \overline{\alpha} \langle x, y \rangle$. En posant $\alpha = \langle x, y \rangle / \|y\|^2$ dans l'inégalité, on aura $\frac{|\langle x,y \rangle|^2}{\|y\|^4} \|y\|^2 - \frac{|\langle x,y \rangle|^2}{\|y\|^2} - \frac{|\langle x,y \rangle|^2}{\|y\|^2} \geq 0$, qui donne $\langle x, y \rangle = 0$ pour tout $y \in F \backslash \{0\}$, alors pour tout $y \in F$. D'où $x \in F^{\perp}$. ■

3.3 Projection hilbertienne et conséquences

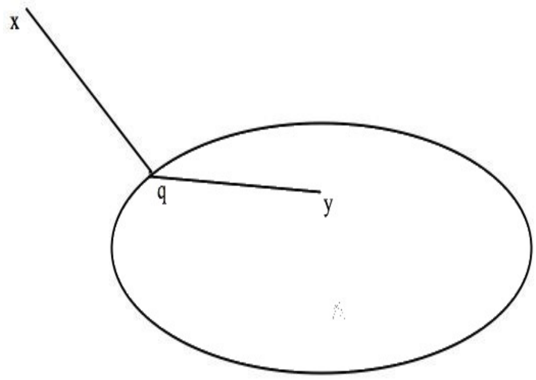
3.3.1 Théorème (Projection sur un convexe fermé)

Soit E un espace préhilbertienet C un convexe non vide et complet de E. Alors pour tout $x \in E$, il existe un **unique** $q \in C$, noté $P_C(x)$, tel que

$$\|x - q\| = d(x, C) = \inf_{a \in C} \|x - a\|.$$

De plus, $P_C(x)$ est caractérisé par les propriétés

$$\begin{cases} P_C(x) \in C \\ \mathrm{Re}\langle x - P_C(x), y - P_C(x)\rangle \leq 0 \quad \forall y \in C \end{cases} \tag{3.3.1}$$



3.3.2 Remarque

Cette inégalité traduit le fait que l'angle entre les vecteurs $x - P_C(x)$ et $y - P_C(x)$ est obtus. Par exemple si $E = \mathbb{R}^2$, elle se traduit par

$$\cos(\widehat{xP_C(x)y}) = \frac{\langle x - P_C(x), y - P_C(x)\rangle}{\|x - P_C(x)\| \|y - P_C(x)\|} \leq 0.$$

Démonstration: Soit $\rho = \inf\{\|x - a\| : a \in C\}$. Par définition de ρ, il existe une suite $\{q_n\}$ de C telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} \rho_n = \|x - q_n\| \to \rho$. Comme C est convexe, il s'en suit que $\frac{q_n + q_m}{2} \in C$ pour tout $n, m \in \mathbb{N}$. D'où $\left\|x - \frac{q_n + q_m}{2}\right\| \geq \rho$ pour tout $n, m \in \mathbb{N}$. L'identité du parallélogramme appliquée à $x - q_n$ et $x - q_m$, nous donne

$$\begin{aligned} \|q_n - q_m\|^2 &= \|(q_n - x) + (x - q_m)\|^2 \\ &= 2\|q_n - x\|^2 + 2\|x - q_m\|^2 - \|(q_n - q_m) - 2x\|^2 \\ &= 2\|q_n - x\|^2 + 2\|x - q_m\|^2 - 4\left\|x - \frac{q_n + q_m}{2}\right\|^2 \\ &\leq 2\rho_n^2 + 2\rho_m^2 - 4\rho^2 \xrightarrow[n,m \to +\infty]{} 0 \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

Ainsi $\{q_n\} \subset C$ est une suite de Cauchy, et par complétude de C, elle converge vers un point $q \in C$. Par suite $\|x-q\| = \rho$. Ce qui donne l'existence de q . Pour l'unicité, on suppose qu'un $q' \in C$ vérifie $\|x-q'\| = \rho$. Alors $(q+q')/2 \in C$ car C est convexe, et donc $\|x - \frac{1}{2}(q+q')\| \geq \rho$. L'identité du parallélogramme appliquée à $x-q'$ et $x-q$ donne $0 \leq \|q-q'\| \leq 4\rho^2 - 4\rho^2 = 0$ Alors $q' = q$, d'où l'unicité.
Enfin, étant donné $y \in C$, pour tout $\lambda \in]0,1]$ le vecteur $(1-\lambda)P_C(x) + \lambda y - x$, de sorte que

$$\begin{aligned}
0 &\leq \|(1-\lambda)P_C(x) + \lambda y - x\|^2 - \|P_C(x) - x\|^2 \\
&= \|(P_C(x) - x) + \lambda(y - P_C(x))\|^2 - \|P_C(x) - x\|^2 \\
&= -2\lambda \operatorname{Re}\langle x - P_C(x), y - P_C(x)\rangle + \lambda^2 \|y - P_C(x)\|^2
\end{aligned}$$

d'où $\operatorname{Re}\langle x - P_C(x), y - P_C(x)\rangle \leq \frac{\lambda}{2}\|y - P_C(x)\|^2$. En faisant tendre λ vers 0^+, on obtient $\operatorname{Re}\langle x - P_C(x), y - P_C(x)\rangle \leq 0$.
Inversement, soit $w \in C$ tel que $\operatorname{Re}\langle x - w, y - w\rangle \leq 0$, $\forall y \in C$, alors on obtient $\|(1-\lambda)w + \lambda y - x\|^2 - \|w - x\|^2 \geq 0$ et en faisant tendre λ vers 1^-, on obtient $\|y-x\|^2 \geq \|w-x\|^2$, $\forall y \in C$, c-à-d que $w = P_C(x)$. ∎

En particulier si $x = 0$ on a :

3.3.4 Corollaire

Tout ensemble convexe non vide et complet d'un espace préhilbertien a un unique élément de norme minimale.

3.3.5 Remarque

Dans le cas particulier où E est un espace de Hilbert, C complet est équivalent à C fermé.

3.3.6 Corollaire

Sous les hypothèses du théorème 3.3.1 la projection P_C est contractante (ou 1-lipschitzienne) i.e. pour tous $x, y \in E$, $\|P_C(x) - P_C(y)\| \leq \|x - y\|$

Démonstration: En effet, en écrivant $x - y = P_C(x) - P_C(y) + x - y - P_C(x) + P_C(y)$, et en développant $\|x-y\|^2$, d'après la caractérisation de la projection, il vient,

$$\|x-y\|^2 \geq \|P_C(x) - P_C(y)\|^2 + \|x - y - P_C(x) + P_C(y)\|^2,$$

d'où le résultat. ∎

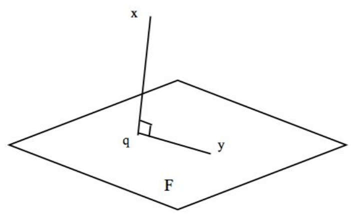
Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors F est convexe non vide, d'où

3.3.8 Corollaire (Théorème de la projection hilbertienne)
Soit F un sous-espace vectoriel complet de l'espace préhilbertien$E$ et soit $x \in E$. Alors, il existe un **unique** $q \in F$, noté $P_F x$, tel que

$$\|x - q\| = d(x, F) := \inf_{a \in F} \|x - a\|.$$

De plus, $P_F x$ est caractérisé par les propriétés

$$\begin{cases} P_F x \in F \\ \langle x - P_F x, y \rangle = 0, \quad \forall y \in F \end{cases} \tag{3.3.3}$$



Démonstration: L'existence de P_F est assuré par le théorème précédent. Il reste à établir la caractérisation. Soit $x \in H$ et $q = P_F x$. Pour tout $y \in F$, $y + q \in F$ en appliquant la caractérisation du théorème précédent, on a $\text{Re}\langle x - q, y \rangle = \text{Re}\langle x - q, (y + q) - q \rangle \leq 0$ En remplaçant y par $-y$, iy et $-iy$ on obtient $\text{Re}\langle x - q, y \rangle = 0$ pour tout $y \in F$. Inversement, si $\text{Re}\langle x - w, y \rangle = 0, \forall y \in F$, pour un certain $w \in V$, alors $\text{Re}\langle x - w, y - w \rangle = 0$ et $\|(1 - \lambda)w + \lambda y - x\|^2 - \|w - x\|^2 \geq 0$ et en faisant tendre λ vers 1^-, on obtient $\|y - x\|^2 - \|w - x\|^2 \geq 0, \forall y \in F$, c-à-d que $w = P_F x$.■

Approximation dans les espaces préhilbertiens

Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $x \in E$, il s'agit de déterminer $u \in F$ qui minimise $\|x-y\|$, $y \in F$, i.e. la meilleure approximation de x dans F. Le téorème de la projection donne, $u = P_F(x)$, qui est caractérisé (voir 3.3.3), par $\langle x-u, y\rangle = 0$, pour tout $y \in F$. On va montrer que ce problème se ramène à la résolution d'un système linéaire.

On fixe une base $\mathscr{B} = \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ de F. Dans ce cas, pour tout $x \in E$, le problème de déterminer la projection de x sur F, revient à résoudre

$$\begin{cases} \text{Trouver } u = \sum_{i=1}^n u_i \phi_i \in F \text{ solution de} \\ Au = B \end{cases} \tag{3.3.4}$$

où $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ avec $a_{ij} = \langle \phi_i, \phi_j\rangle$, est la matrice de Gram du produit scalaire dans la base $\mathscr{B}$ et $B = \begin{pmatrix} \langle x, \phi_1\rangle \\ \vdots \\ \langle x, \phi_n\rangle \end{pmatrix}$.

En effet, la caractérisation 3.3.3 $\langle x-u, y\rangle = 0$, $\forall y \in F$ est équivalente à : pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $\langle u - \sum_{i=1}^n u_i\phi_i, \phi_j\rangle = 0$ i.e. $\sum_{i=1}^n u_i \langle \phi_i, \phi_j\rangle = \langle x, \phi_j\rangle$ qui n'est autre que le système d'équations $Au = B$.

3.3.10 PROPOSITION
L'erreur d'approximation de x par $u = P_F(x)$ est égale à

$$d(x,u) = \|x-u\| = \left(\|x\|^2 - \sum_{i=1}^n u_i \langle x, \phi_i\rangle\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Démonstration: En effet $\|x-u\|^2 = \langle x-u, x-u\rangle = \langle x, x-u\rangle = \langle x, x\rangle - \langle x, u\rangle$. ∎

3.3.12 Exercice Montrer que la matrice de Gram est définie positive.

3.3.13 EXEMPLE (APPROXIMATION PAR LES MOINDRES CARRÉS.). Soit n nombres réels strictement positifs $p_i > 0$, $i \in \{1, \dots, n\}$ fixés, appelés "poids". Etant donné un nuage de n points $(x_i, y_i)_{1 \le i \le n}$ de $\mathbb{R}^2$, que l'on désire "ajuster" au mieux par une droite affine, par rapport à la norme et relativement aux poids.

On cherche alors à minimiser la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ définie par $f(s,t) = \sum_{i=1}^n p_i \left(y_i - sx_i - t\right)^2$. On va utiliser pour cela le résultat sur les projections hilbertiennes.

On prend pour H l'espace des fonctions définies sur l'ensemble fini $\{x_1, \dots, x_n\}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, i.e. $H = \{f : \{x_1, \dots, x_n\} \to \mathbb{R}\}$, et comme produit scalaire l'application définie par :

$$\langle f, g\rangle := \sum_{i=1}^n p_i f(x_i) g(x_i) \text{ pour tous } f, g \in H$$

3.3.14 Exercice Montrer que $(H, \langle , \rangle)$ est un espace de Hilbert

Comme on veut approcher ce nuage de points par des droites affines, on va choisir pour F l'espace vectoriel des droites affines, i.e. $F = \{f \in H | \exists c, d \in \mathbb{R}, f = c\phi_1 + d\phi_0\}$ où $\phi_0(x) = 1$ et $\phi_1(x) = x$ pour tout $x \in \{x_1, \ldots, x_n\}$.

La fonction qui nous intéresse est la fonction $f \in H$ définie par $f(x_i) = y_i$ et sa projection sur F, $P_F f = a\phi_1 + b\phi_0$ est solution de

$$\begin{pmatrix} \langle \phi_1, \phi_1 \rangle & \langle \phi_0, \phi_1 \rangle \\ \langle \phi_1, \phi_0 \rangle & \langle \phi_0, \phi_0 \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle f, \phi_1 \rangle \\ \langle f, \phi_0 \rangle \end{pmatrix}$$

ce qui revient à résoudre le système

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 & \sum_{i=1}^n p_i x_i \\ \sum_{i=1}^n p_i x_i & \sum_{i=1}^n p_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n p_i y_i x_i^2 \\ \sum_{i=1}^n p_i y_i \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 & \sum_{i=1}^n p_i x_i \\ \sum_{i=1}^n p_i x_i & \sum_{i=1}^n p_i \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n p_i y_i x_i^2 \\ \sum_{i=1}^n p_i y_i \end{pmatrix}.$$

3.3.15 Exemple. Soit $a < b$ deux réels et $p :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et intégrable sur $[a, b]$. L'espace $H = C^0([a, b], \mathbb{R})$, des fonctions continues sur $[a, b]$, muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle := \int_a^b p(x) f(x) g(x)\, dx$ est un espace préhilbertien.

Soit $F_n := \mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes de degré $\leq n$. F est de dimension $n+1$ et $\{1, x \ldots, x^n\}$ est une base de F .

Alors pour tout $f \in H$, la projection orthogonale $P_F f = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, de f sur F est déterminée par le système

$$\begin{pmatrix} \langle 1, 1 \rangle & \langle x, 1 \rangle & \cdots & \langle x^n, 1 \rangle \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \langle 1, x^n \rangle & \langle x, x^n \rangle & \cdots & \langle x^n, x^n \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle f, 1 \rangle \\ \vdots \\ \langle f, x^n \rangle \end{pmatrix}.$$

Par exemple, si $p \equiv 1$ et $[a, b] = [0, 1]$, la matrice de Gram du produit scalaire dans la base $\{1, x \ldots, x^n\}$ est la matrice $A = (a_{ij})_{0 \leq i, j \leq n}$ où $a_{ij} = \frac{1}{i+j+1}$ cette matrice est appelée matrice de Hilbert.